RASTREO HISTÓRICO DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN: ¿UN INSTRUMENTO PARA REPLANTEAR LA ENSEÑANZA?

Montenegro Fabiana G.
Escuela Normal Superior N°32 'Gral. José de San Martín'
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la
Universidad Nacional del Litoral, Argentina.
montenegrofabiana@yahoo.com.ar

RESUMEN

Este artículo se encuadra en el Proyecto de Investigación '*Reconstrucción de una organización matemática local relativamente completa, en relación al estudio de la recta*' (INFOD) desarrollado en el Profesorado de Educación Secundaria en Matemática de la Escuela Normal Superior N°32 de Santa Fe. Se presenta una síntesis personal del desarrollo histórico del concepto de función dando cuenta de una génesis lenta y de orígenes variados. Quizás en la historia de la matemática se puedan hallar consideraciones para repensar el aprendizaje, la enseñanza y evaluar la dificultad intelectual que ha supuesto la adquisición de este concepto para la humanidad.

PALABRAS CLAVE: Historia. Función. Enseñanza.

INTRODUCCIÓN

El presente artículo se enmarca en un Proyecto de Investigación perteneciente a la Convocatoria del año 2013 del INFOD (Instituto Nacional de Formación Docente) titulado '*Reconstrucción de una organización matemática local relativamente completa, en relación al estudio de la recta*', y desarrollado por un grupo de profesores y alumnas del Profesorado de Educación Secundaria en Matemática, con sede en la Escuela Normal Superior N°32 'Gral. José de San Martín' de la ciudad de Santa Fe, Argentina.

Uno de los objetivos de este proyecto fue profundizar en la evolución histórica-epistemológica de la noción de recta y sus reformulaciones desde la geometría euclídea, la geometría analítica, el álgebra y los procesos variacionales. De esta actividad surge la iniciativa de escribir este artículo. La exploración histórica que posibilita el concepto de función evidencia la génesis lenta de uno de los conceptos más importantes de la matemática. Este concepto, al igual que cualquier otro objeto de la matemática fue el resultado de distintos hombres provenientes de diversas naciones de diferentes momentos históricos.

Este trabajo presenta una síntesis personal del desarrollo histórico del concepto de función. Debido a lo extenso y complejo del proceso en cuestión, no pretende ser exhaustiva sino mencionar algunas de las principales contribuciones en el acontecer histórico. Si bien escapa a los objetivos de este artículo argumentar porqué la historia de la matemática es fuente de inspiración, autoformación y orientación de la actividad docente, creo oportuno reflexionar brevemente sobre su importancia.

> La Historia de la matemática permite conocer las cuestiones que dieron lugar a los diversos conceptos, las intuiciones e ideas de donde surgieron, el origen de los términos, lenguajes y notaciones singulares en que se expresaban, las dificultades que involucraban los problemas que resolvían, el ámbito en que se aplicaban, los métodos y técnicas que desarrollaban, cómo fraguaban definiciones, teoremas y demostraciones, la ilación entre ellos para forjar teorías, los fenómenos físicos o sociales que explicaban, el marco espacial y temporal en que aparecían, cómo fueron evolucionando hasta su estado actual, con qué temas culturales se vinculaban, las necesidades cotidianas que solventaban (González Urbaneja, 2004, p 18)

En contraposición a esta afirmación, en general, en la enseñanza Secundaria los conceptos matemáticos se presentan ante los alumnos como "un producto dogmático, cerrado y acabado" (González Urbaneja, 2004, p. 18), como asépticos, sin referencia alguna al proceso de gestación o a algunos de los matemáticos que colaboraron en su evolución, sin mencionar las razones que han conducido a los hombres a ocuparse de ellos con interés, sin poner de manifiesto el desarrollo continuo y no siempre exitoso de la actividad científica bajo la cual se fueron gestando. Esta desvalorización del conocimiento y la transmisión de cómo han avanzado los matemáticos hasta llegar a reunir los resultados de los que hoy disponemos, contribuye al aspecto de deshumanización que algunos le asignan a la matemática. Zapico, Serrano y Micelli (2000, citado en Bozzano, 2012) opinan:

> Sin duda mejoraremos su enseñarla al humanizarla, mostrando quiénes, cómo, cuándo y por qué la hicieron, poniendo en evidencia que en su desarrollo hubo aciertos y errores, que en ocasiones avanzó a partir de necesidades cotidianas, prácticas y, en otras, en cambio, para responder a necesidades espirituales de orden, armonía y belleza (Bozzano, 2012, p. 13)

Considerando el criterio de Boyer "El tiempo y la historia son, desde luego, totalidades completas y sin suturas […] y cualquier subdivisión en períodos es obra de la mano del hombre; pero […] la subdivisión de los acontecimientos en eras y períodos resulta ser conveniente" (Boyer, 1986, p. 319), se ha dividido el desarrollo histórico por eras de la humanidad.

EL CONCEPTO DE FUNCIÓN

El concepto de función es uno de los conceptos matemáticos que mayor complejidad presenta, ya debido a sus variadas concepciones y a sus múltiples representaciones. Entre las variadas concepciones puede citarse:

- como ente numérico, es decir, dado un valor particular de x encontrar f(x), (definición en términos de correspondencia entre valores de dos cantidades),
- como modelo de predicción que relaciona cantidades, es decir, del cambio de x_1 a x_2 inferir el cambio de $f(x_1)$ a $f(x_2)$
- como objeto formal en sí mismo y por lo tanto susceptible de manipulaciones analíticas y gráficas.

Y entre las múltiples representaciones se cuentan las tablas de valores, gráficas, expresiones algebraicas equivalentes, algoritmos de cálculo, etc. El trabajo con estas distintas representaciones posibilita unificar diversos conceptos provenientes de otros sectores de la matemática, superando así la fragmentación de la matemática escolar:

> Es importante no perder de vista la potencia de este campo conceptual, que a través de los conceptos y procedimientos involucrados permiten a los alumnos desarrollar capacidades para analizar, organizar y modelizar matemáticamente problemas relacionados con situaciones propias de la actividad práctica del hombre, de otras ciencias y las propiamente matemáticas, en las que la variación es el sustrato (Montenegro y Nagel, 2011, p 36). (Extraído de Montenegro y Nagel, 2011, p. 36)

La importancia de este concepto es destacada por Courant debido a su aplicabilidad a los fenómenos físicos:

> Las leyes físicas no son más que enunciados referentes a la manera en la cual ciertas cantidades dependen de otras cuando se permite que algunas de ellas varíen. Así el tono de la nota emitida al tensar una cuerda depende de la longitud, el peso y la tensión de la cuerda; la presión de la atmósfera depende de la altitud, y la energía de una bala depende de su masa y de su velocidad. La tarea del físico es determinar la naturaleza, exacta o aproximada, de esta dependencia funcional. (Courant y Robbins, 2002, p 310)

Sin embargo a pesar de su jerarquía en la disciplina "los autores que se han ocupado de estudiar la génesis del concepto de función, no están de acuerdo unánimemente acerca del tiempo en que se originó el concepto como tal" (Cañón Loyes C., 1993, p. 168).

> A pesar de los numerosos estudios sobre la historia de las matemáticas, existen pocos trabajos dedicados especialmente al origen del concepto de función y además las opiniones de los autores son distintas e incluso contradictorias. Así, mientras algunos reconocen cierto carácter funcional en algunas operaciones matemáticas de la antigüedad (especialmente en trabajos de astronomía de los babilonios, de Ptolomeo o de los árabes), otros sitúan su nacimiento junto al nacimiento de la geometría analítica y algunos todavía sitúan su auténtica aparición en pleno siglo XIX con las definiciones clásicas dadas por Dirichlet y Lobatchevsky.
>
> (Azcárate Gimenez y Deulofeu Piquet, 1996, p. 37).

RASTREO HISTÓRICO

Para Kant (1724-1804) 'Al contrario que en las ciencias empíricas los conceptos [matemáticos] nacen terminados. Antes de la definición de un concepto, no se tiene nada respecto de él, pues la definición de un concepto es el medio por el cual se nos da' (Cañón Loyes, 1993, p. 161). Esta concepción kantiana de la Matemática según la cual las definiciones de un objeto matemático son acabadas desde el principio y aseguran la representatividad del mismo de manera única, universal y sin poder esperarse mejoras en su presentación, contrasta con el rastreo histórico de conceptos que no fueron definidos de una vez para siempre sino que, a medida que aparecieron nuevos casos susceptibles de ser captados bajo dicho concepto, las definiciones fueron perfilándose, ampliándose y obteniendo precisión.

Un caso privilegiado de raíces variadas y progresivas, en el que han intervenido diversos factores y congrega los aportes de distintos matemáticos de distintas civilizaciones es el de función. Así dos extremos posibles se diferencian. Considerar que el concepto de función era conocido y utilizado antes de las primeras definiciones o pensar que surge cuando estas primeras definiciones pasan a integrar el cuerpo de conocimientos científicos.

1° ETAPA: EDAD ANTIGUA (desde la aparición de la escritura hasta la caída del Imperio Romano en el 476 d.C) El afianzamiento de la escritura antes de que finalizara el siglo IV a.C tanto en Mesopotamia como en el valle del Nilo, permitió el surgimiento de instrumentos de registro a través de los cuales ha sido posible conocer los saberes construidos a partir de la antigüedad.

✓ De tablillas de arcilla encontradas en excavaciones arqueológicas se puede inferir que en la ***Civilización Babilónica*** (ubicada en Mesopotamia, actualmente Irak, 5000 a.C) se empleaba lo se denomina ‘álgebra retórica’ pues los problemas se formulaban y se resolvían en lenguaje oral o escrito sin emplear anotaciones algebraicas similares a las actuales. Lo que actualmente se conoce como ecuaciones cuadráticas, algunas ecuaciones cúbicas y bicuadráticas, sistemas de ecuaciones con dos incógnitas, etc., se resolvían solo en lenguaje verbal.

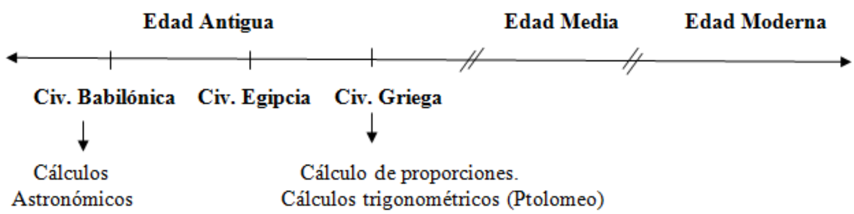
La astronomía, estrechamente vinculada con la astrología, impulsó a los babilonios a intentar predecir determinados fenómenos efectuando observaciones sistemáticas de fenómenos que se repetían periódicamente e intentando aritmetizar dichas observaciones mediante interpolaciones (lineales y geométricas), extrapolaciones y búsqueda de regularidades. A modo de ejemplo analizaban los períodos de visibilidad de un planeta y el ángulo que éste forma con el Sol. Azcarate y Piquet (1996) consideran que en los métodos aritméticos cuantitativos desarrollados por los astrónomos babilónicos, puede encontrarse el germen más remoto de la noción de función ya que constituyen las referencias más antiguas conocidas del estudio de fenómenos de cambio y a que sus documentos no se limitan datos empíricos tabulados sino que presentan auténticas funciones tabuladas debido al uso de interpolaciones y extrapolaciones y a la búsqueda de regularidades.

✓ Según papiros como los del Rhin y de Moscú, en la ***Civilización Egipcia*** (3100-322 a.C) se lograron algunos avances en el campo algebraico. A partir de problemas de la cotidianidad (como los de reparto, el cálculo de granos necesarios para producir determinadas cantidades de cerveza, etc.) aplicaron el método de la falsa posición en ecuaciones lineales y manejaron progresiones aritméticas y geométricas empleando algunos símbolos.

✓ La preocupación de investigar el ‘por qué’ de las cosas más allá del ‘cómo’, impulsó en la ***Civilización Griega*** (2800 a.C – 600 d.C) la transformación de la matemática en una ciencia deductiva. Atendiendo a los fines de este artículo, dentro de la civilización griega vamos a detenernos en Ptolomeo (100-170). Aunque las civilizaciones anteriores habían empleado propiedades relativas a las razones entre los lados de triángulos semejantes, no las habían formulado de manera explícita. En la matemática griega se encuentra por primera vez un estudio sistemático de las relaciones entre los ángulos centrales en un círculo y las longitudes de las cuerdas que los subtienden.

La obra trigonométrica, también considerada un tratado astronómico, más significativa y de mayor influencia de la antigüedad, la ‘Sintaxis Matemática’, pertenece a Ptolomeo. Fue distinguida con la denominación de la *colección mayor y*, como todos los tratados griegos clásicos de ciencia, se preservó en manuscritos árabes. Fue así fue cómo surgió posteriormente en Arabia la costumbre de llamar a esta obra de trece libros, *Almagesto* o *Almagest* (el más grande). Resistiendo el paso del tiempo, en esta obra se encuentran no sólo tablas trigonométricas sino explicaciones de los métodos utilizados en su construcción. Por ejemplo en el cálculo de las cuerdas, Ptolomeo empleo una proposición geométrica conocida todavía como ‘Teorema de Ptolomeo’ que afirma ‘la suma de los productos de los lados opuestos de un cuadrilátero concíclico convexo es igual al producto de las diagonales'. Como caso particular de este resultado, si uno de los lados del cuadrilátero es el diámetro del círculo, él obtuvo la fórmula del seno de una diferencia de dos arcos, conocida hoy como el seno de la diferencia de dos ángulos. También empleó sistemáticamente en sus tablas la fórmula que permite calcular la cuerda del arco mitad, conocida actualmente como el seno del ángulo mitad. Una vez que decidió un sistema para subdividir la circunferencia de un círculo y un método para subdividir el diámetro del mismo círculo, dispuso de todo lo necesario para construir la tabla de las cuerdas de todos los arcos desde 0.5° a 180°, de medio en medio grado. Esta tabla formaba parte del Libro I del Almagest y constituyó una herramienta indispensable para los astrónomos durante más de mil años.

Síntesis del aporte del mundo antiguo al concepto de función: El estudio de correspondencias se efectúo en casos aislados:



En relación a la discrepancia ya mencionada, Youschkevitch A. (1976-1977) sostiene que no hubo idea general de funcionalidad en los tiempos antiguos, contraponiéndose a la opinión de Pedersen Q. (1974) que en relación al Almagest afirmó:

> Si concebimos una función no como una fórmula, sino como una relación más general que asocia los elementos de un conjunto de números (p.e puntos del tiempo t_1, t_2, t_3, t_4,…) con los elementos de otro conjunto (p.e alguna variable angular en el sistema planetario), es obvio que las funciones en este sentido abundan en el Almagest. Solamente falta la palabra: la cosa está allí y lo está representada claramente por las muchas tablas de elementos correspondientes de tales conjuntos.
>
> (Pedersen, 1974, p. 35)

Cañón Loyes (1993) considera que ambas posiciones son congruentes entre sí porque aunque los griegos no llegaron al reconocimiento de la idea general de función (tal como afirma Youschkevitch) en el trabajo de los matemáticos de la antigüedad, y en particular en Ptolomeo, pueden reconocerse registros instantáneos del moderno concepto de función. Sin embargo es difícil encontrar aspectos que permitan intuir la existencia de otros conceptos como variable o función debido a que el material proveniente de este periodo histórico se reduce a tablas de cómputo y a colecciones de problemas resueltos sin explicitación de métodos y justificaciones.

<u>2° ETAPA:</u> LA EDAD MEDIA (desde el final del Imperio Romano, aproximadamente en 476 d.C, hasta el siglo XV) Según Boyer (1986) el hecho de que generalmente se ofrezca una visión simplificada de la evolución de la matemática en la Edad Media resulta de una presentación de la historia centrada predominantemente en Europa. Sin embargo la mayor parte de historia de la matemática medieval es obra de cinco grandes civilizaciones que escribieron en cinco lenguas diferentes: China, India, Arabia, Imperio Romano de Oriente e Imperio Romano de Occidente. A los fines de esta síntesis, mencionaremos las contribuciones que durante estos 1000 años provocaron el adelanto en la configuración del concepto en cuestión.

El estudio de las ciencias que los griegos habían asumido hasta ese momento, pasó a manos de los árabes, quienes permitieron que el legado de los primeros llegara a occidente. Los árabes mejoraron los métodos de estudio de las funciones trigonométricas ampliando y perfeccionando los sistemas de interpolación esenciales para su tabulación, pero no existen indicios de que hayan avanzado hacia el concepto general de función.

En cuanto al mundo occidental, en este período histórico una de las preocupaciones se centró en el estudio de las cosas sujetas al cambio y en particular al movimiento.

Se intentó encontrar un modelo del universo que permita responder los *por qué* (sopla el viento, cae la lluvia, los planetas brillan, etc.) y al mismo tiempo expliqué *de qué modo suceden estos cambios*. Por ejemplo a la pregunta de por qué cae una piedra cuando se la tira se suma cómo cae esta piedra y a qué velocidad. “Este cambio, junto a la progresiva aparición de la ciencia experimental, permitirá un acercamiento entre las matemáticas y las ciencias de la naturaleza, y será la base del impulso que la ciencia sufrirá a partir del siglo XIV” (Azcárate Gimenez y Deulofeu Piquet, 1996, p. 44).

Así, en las llamadas Escuelas de Filosofía Natural de Oxford y París, dos de los principales núcleos de desarrollo de la ciencia, se inicia un estudio del movimiento local no uniforme. También en ellas, partiendo de las matemáticas griegas y empleando la terminología de Aristóteles, se inició a partir del siglo XIII el estudio de fenómenos que cambian como calor, luz, densidad, velocidad y que pueden poseer distintos grados de intensidad que cambian entre dos límites establecidos. Es entonces cuando aparecen conceptos como cantidad variable, velocidad instantánea, aceleración, etc. Sin embargo el trabajo experimental es prácticamente inexistente y ciertos fenómenos complejos continúan siendo descritos sólo cualitativamente.

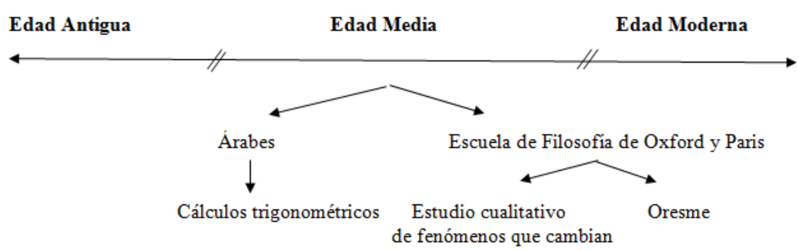
En relación al objetivo de este artículo, dentro de la escuela francesa puede nombrarse a Oresme (1323-1382) quien prosiguiendo con el estudio de los fenómenos que cambian, propone una aproximación geométrica a los estudios cinemáticos-aritméticos desarrollados hasta el momento.

> En su Tractatus de Latitudinibus […] asoma, por primera vez la noción de representación gráfica de funciones o, mejor, fenómenos de una variable. Asignándoles los nombres astronómicos 'longitud' y 'latitud', toma sobre un eje los valores de la variable y sobre las normales a él los correspondientes de la función (Rey Pastor y Babini, 1951, p. 156)

No obstante no es posible considerar las representaciones de Oresme como la expresión de una dependencia en el sentido que hoy se le asigna. Así, si bien durante la Edad Media aparecen explícitas algunas nociones generales sobre dependencia entre dos variables, éstas se expresan sólo mediante una descripción verbal o mediante un gráfico.

> Todo hace pensar que el camino estaba preparado. En efecto, la influencia de Oresme y de los ingleses en Galileo Galilei y en Descartes primero, y en Barrow, Newton, Leibniz después fue, al parecer, notable, aunque no dispongamos de evidencias demasiadas claras. En realidad, si durante el final de la Edad Media no fue posible avanzar más, se debió a la desproporción entre el nivel de abstracción de las teorías abordadas y la falta de un correcto aparato matemático para su desarrollo.
>
> (Azcárate Gimenez y Deulofeu Piquet, 1996, p. 45)

Síntesis del aporte del Medievo al concepto de función:



3° ETAPA: EDAD MODERNA (Siglos XVI al XVIII) El concepto de función se gestó lentamente durante los siglos XVI, XVII, XVIII y XIX. Cerca de tres siglos separan la obra de Oresme del siglo XVII, período que puede ser considerado como el más fecundo para la formación del concepto de función, puesto que en él vivieron entre otros Galileo, Descartes, Fermat, Newton, Leibniz y Gregory cuyas contribuciones darán lugar al nacimiento de la geometría analítica y del cálculo infinitesimal.

Entre los factores que incidieron en que durante 300 años aproximadamente no haya habido avances importantes en la gestación del concepto de función, pueden nombrarse que los centros que durante la Edad Media se habían destacado en el desarrollo de la ciencias en Inglaterra y Francia fueron desplazados a Italia por causas sociopolíticas y, por otro lado, todavía estaba ausente un simbolismo matemático adecuado.

Siglo XVI
En la Escuela de Bolonia, los algebristas desempeñaron un papel fundamental en la evolución de la teoría de funciones. A fines del siglo XV dal Ferro (1465-1526) resolvió por un método algebraico la ecuación incompleta de tercer grado, pero no divulgó su procedimiento más que a un círculo restringido. En 1535 Cardano (1501-1576) y Ferrari (1522-1565) publicaron por primera vez el resultado de dal Ferro junto a complementos esenciales de su propia autoría, entre ellos la aparición de nuevos números que en la actualidad son los números complejos. Hacia 1572, Bombelli (1526-1572) estableció las reglas de cálculo para dichos números, introdujo el uso de paréntesis en los cálculos algebraicos y empleó letras para designar coeficientes.

En la transición del Renacimiento al mundo moderno la figura central fue el francés Viéte (1540-1632). A pesar de que solo se dedicó a la matemática en sus ratos de ocio, efectúo importantes contribuciones a la aritmética, al álgebra, a la trigonometría y a la geometría. Indudablemente fue en álgebra el campo en el que hizo sus mayores aportes por su aproximación al punto de vista moderno. Si bien hasta el momento se habían introducido ciertos símbolos y abreviaturas para representar una incógnita y las primeras potencias de esa misma incógnita, las operaciones algebraicas y la relación de igualdad se circunscribían a casos particulares. Además no se disponía de un modo de escribir una ecuación que representará a cualquiera de una clase de ecuaciones del mismo tipo. Desde los tiempos de Euclides se habían empleado letras para representar magnitudes conocidas o no, pero fue Viéte quien estableció la distinción entre el concepto de parámetro y de incógnita proponiendo utilizar una vocal para representar una cantidad que se supone desconocida o indeterminada y una consonante para representar una magnitud o un número conocido o dado.

Debe nombrarse asimismo que el Álgebra de Viéte fue básicamente sincopada, es decir, consistente en palabras y abreviaturas, más que simbólica ya que si bien adoptó los símbolos germánicos para la suma y la resta, no adoptó otros simbolismos que ya existían en su época. Por ejemplo el alemán Stifel (1487-1567) ya había propuesto utilizar una única letra para representar una incógnita y repetir dicha letra para las potencias más elevadas de la incógnita, por ejemplo escribir AAA para representar la tercera potencia de A. Sin embargo Viéte empleaba en este ejemplo A cubus. La unificación y simplificación que poco a poco se produjeron en los signos operatorios hasta la forma adoptada en la actualidad, provocaron un magnifico impulso de la matemáticas del próximo siglo beneficiada por los trabajos mencionados de éste siglo.

La obra científica de Galileo (1564-1642) muchas veces es considerada como el punto de arranque de la ciencia moderna. Aunque sus métodos se basaban todavía en la clásica teoría griega sobre las proporciones, produjo avances en el estudio del movimiento buscando justificaciones experimentales de leyes establecidas, es decir, describió en detalle experimentos en las que empleó ingeniosos instrumentos para calcular medidas que le permitieron establecer leyes entre magnitudes que son auténticas relaciones funcionales. Esto lo diferencia de Oresme que no llevó a cabo justificaciones experimentales.

Siglo XVII

En el siglo XVII era urgente construir un lenguaje en el que expresar las relaciones de los fenómenos de la mecánica y de la cinemática para la explicación matemática de los fenómenos naturales. Fue Francia el centro del mundo matemático durante el segundo tercio del siglo XVII. A dos matemáticos franceses puede atribuírseles la creación de la geometría analítica: Descartes (1596-1650) y Fermat (1601-1665). El primero publicó en 1637 su obra, La Géométrie, como uno de los tres apéndices de una obra en las que exponía sus ideas filosóficas. El segundo incorporándose a la práctica de restaurar obras perdidas de la antigüedad se dedicó a reconstruir los lugares planos de Apolonio y en esta tarea, descubrió el principio fundamental de la geometría analítica "Siempre que en una ecuación final aparezcan dos cantidades incógnitas, tenemos un lugar geométrico, al describir el extremo de una de ellas una línea, recta o curva" (citado en Boyer, p 437). El salto creativo de ambos matemáticos consistió en desarrollar un método geométrico-analítico cartesiano para expresar la relación entre los puntos de una curva como una ecuación algebraica.

Esta idea fundamental, afectará igualmente de manera decisiva a las funciones, ya que en este

> mismo trabajo [haciendo referencia a La Géométrie] aparece por primera vez el hecho de que una ecuación en x e y es una forma de expresar una dependencia entre dos cantidades variables, de manera que, a partir de ella, es posible calcular los valores de una variables que corresponden a determinados valores de la otra (Azcárate Gimenez y Deulofeu Piquet, 1996, p. 47)

La notación algebraica de Descartes se parece, prácticamente en todo, a la actual ya que éste fue más sistemático que sus predecesores en el álgebra simbólica. El empleo de las primeras letras del alfabeto para los parámetros y de las últimas para las incógnitas o variables, la notación exponencial y la utilización de los símbolos germánicos + y – hacen que La Géométrie sea al decir de Boyer "el primer texto matemático que un estudiante de álgebra actual puede leer sin encontrarse con dificultades de notación" (Boyer, 1986, p. 427)

Descartes consideró solamente las funciones algebraicas, excluyendo las curvas mecánicas que no podían ser tratadas desde su método de análisis. No obstante, a partir de la mitad del siglo XVII el descubrimiento del desarrollo de funciones en series infinitas de potencias, debido entre otros a Newton, ampliará la representación analítica de la mayoría de las funciones estudiadas en aquellos tiempos. De todos los matemáticos que anticiparon fragmentos del cálculo diferencial e integral puede nombrarse a Barrow (1630-1677) quien parece haber reconocido el carácter inverso de los problemas relativos a tangentes y cuadraturas. Sin embargo, su adhesión conservadora a los métodos geométricos, le impidió emplear de manera efectiva esta relación.

El invento del cálculo, que surge ante problemas de mecánica, es atribuido a Newton (1642-1727) y a Leibniz (1646-1716). Newton ingresó al Trinity College, en donde Barrow era profesor, en 1661 y allí tuvo la oportunidad de familiarizarse con las obras de Galileo, Fermat y otros. La epidemia de peste bubónica forzó el cierre de dicha universidad en 1665 y obligó a Newton a regresar a su hogar. Luego de pasar 18 meses de meditación nacieron su método de fluxiones, su teoría de la gravitación y su teoría de la luz. "Fue el período de descubrimientos matemáticos más fecundo jamás registrado", al parecer de Boyer, pues en él surgen el teorema binomial, el cálculo, la ley de gravitación y la naturaleza de los colores.

En la terminología de Newton la función es una fluente, es decir, una cantidad que transcurre en el tiempo la derivada es la velocidad o fluxión, y sirve para estudiar las variaciones de la fluente.

> En efecto, al determinar un movimiento $x=f(t)$ sobre el eje x, en el tiempo t, lo que caracteriza dicha movimiento es su velocidad, es decir, el valor límite del cociente de diferencias $\Delta x/\Delta t$. Esta velocidad, con la cual varía x en el tiempo, es la que Newton llama fluxión de x que representa asimismo por x y que toma como base para todas sus consideraciones. Supone las variables x, y dependiente de una variable primitiva t, el tiempo (Azcárate Gimenez y Deulofeu Piquet, 1996, p. 49)

Un tratado sobre el método de las fluxiones fue escrito por Newton hacia 1672, pero fue publicado recién nueve años después de su muerte. Hacia 1687 el nuevo método, hoy denominado cálculo, fue anunciado en términos vagos, sin simbolismo, fórmulas ni aplicaciones. Leibniz inició su trabajo en 1673, ocho años después que Newton. En 1675 estableció la notación moderna dx y $\int$ y las reglas del cálculo diferencial. Sus publicaciones aparecieron en 1684 y 1686 pero causaron poco impacto en Alemania. Posteriormente los hermanos Bernoulli de Suiza, adoptaron sus ideas y las enriquecieron. En los trabajos de Newton y Leibniz aparecen los roles distintivos de las variables independiente y dependiente, aunque no con esta terminología.

Siglo XVIII

La ciencia del siglo XVIII es la edad de oro de la mecánica y del cálculo infinitesimal. Confluyen la ley de gravitación y las leyes de la mecánica, ambas gracias a Newton, permitiendo traducir en ecuaciones diferenciales los movimientos de los planetas junto a los algoritmos que permiten resolver dichas ecuaciones.

> Los métodos infinitesimales de Newton y de Leibniz no se hicieron conocer hasta las últimas décadas del siglo XVII, pero la difusión de las nuevas ideas fue muy lenta. El carácter novedoso de las mismas, las notaciones inusitadas y diferentes, su publicación en memorias aisladas y fragmentadas, todo contribuía a que los nuevos métodos no se extendieran rápidamente; de manera que a fines del siglo XVII, fuera de sus autores, eran muy pocos los matemáticos que estaban enterados de esos

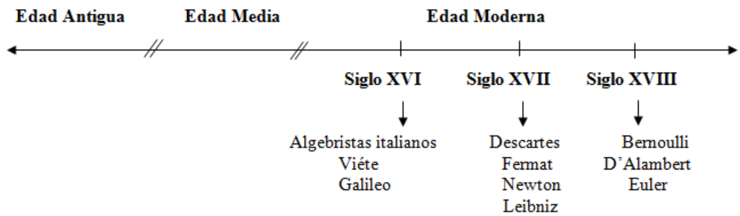
> métodos y, sobre todo, muy pocos los que estaban en condiciones de aplicarlos (Rey Pastor y Babini, 1951, p. 243)

De este modo durante el siglo XVIII el análisis matemático va adquiriendo mayor importancia e independencia hasta el extremo de que la mecánica, de cuyos problemas surgió el análisis, llega a ser considerada como parte de éste. La figura más representativa del siglo XVIII fue Euler (1707-1783) quien desarrolló una intensa actividad científica hasta los últimos años de su vida, cuando ciego dictaba sus trabajos. Sus aportes abarcan muchos de los campos de la matemática y la física: aritmética, teoría de números, álgebra, probabilidades, cálculo infinitesimal, geometría, mecánica racional y aplicada, astronomía, etc.

La primera definición explicita de función como una expresión analítica se debe a Johann Bernoulli (1667-1748, también conocido como Jean) en 1718. Sin embargo la notación empleada no perduró y se le atribuye a Euler la notación f(x) empleada hasta nuestros días. Hacia 1748 Euler presentó un estudio detallado del concepto de función y de otros términos relacionados con éste: constante y variable. Siguiendo a su maestro Bernoulli al definir función la describe como una expresión analítica, es decir, una expresión compuesta de potencias, logaritmos, funciones trigonométricas, etc.

Por esa época distintos matemáticos, Taylor (1685-1731), Johan Bernoulli, Daniel Bernoulli (1700-172) y D'Alambert (1717-1783), estaban estudiando el movimiento de una cuerda fijada en sus dos extremos. En 1747 es D'Alambert quien encuentra la solución general a la ecuación de ondas. Al año siguiente Euler presenta una demostración distinta. Es en este trabajo sobre la solución general de la ecuación de ondas, cuando Euler encuentra la necesidad de ampliar la primera definición admitiendo las llamadas 'curvas mecánicas', esto es, aquellas curvas que son trazadas con referencia a un sistema de coordenadas y para la cuales no se conoce la(s) ecuación(es). Mientras que D'Alambert optó por rechazar la admisión de tales curvas como objetos del análisis matemático, Euler estableció una diferenciación entre funciones para lograr incluirlas: continuas y discontinuas, aunque con un significado distinto del actual. El camino de avance hacia el concepto de función continuaba.

Esta controversia con D'Alembert es el germen de una definición inédita hasta el momento. Euler explicitará en esta nueva definición la noción general de correspondencia entre pares de elementos, publicando en 1755 "Si x es una cantidad variable, entonces toda cantidad que dependa de x de cualquier manera o que esté determinada por aquél se llama una función de dicha variable" (Azcarate, 1996, p. 51). Los problemas se iban complejizando y la resolución del problema de la cuerda tensa que Bernoulli había resuelto a partir de una serie de funciones trigonométricas mientras que Euler y D'Alembert a partir de funciones arbitrarias, hizo suponer que la solución dada por estos dos matemáticos era más general hasta que Fourier demostró que no era así en 1824.



4° ETAPA: EDAD CONTEMPORANEA (Siglos XVIII a la actualidad) Hacia 1800 Lagrange (1736-1813) restringe nuevamente el concepto de función limitándolo a las llamadas 'funciones analíticas' que están definidas por series de potencias. De este modo vuelven a quedar fuera del concepto de función las curvas mecánicas de Euler. Dicha limitación de debía a la concepción de función al modo de polinomios.

Fue Fourier (1768-1830) quien en 1822 en su libro 'Teoría analítica del calor' derrumba las barreras respecto de la concepción de la dependencia funcional manejable en análisis, permitiendo el paso de la representatividad de las funciones en series de potencias a la representatividad en series trigonométricas, hoy conocidas como Series de Fourier. Dirichlet (1805-1859), discípulo de Fourier, publica en 1829 un artículo proponiendo el primer criterio de suficiencia para la convergencia de las Series de Fourier y en 1837 presenta una formulación aritmética del concepto de funciones ampliado de Euler dando comienzo al fin del proceso clarificador respecto del concepto de función. Así quedó establecido que para definir una función no es importante la ecuación que determina la correspondencia entre variables, sino la correspondencia misma, proponiendo la siguiente definición:

> Si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x. (Azcárate Gimenez y Deulofeu Piquet, 1996, p. 52)

Según este enunciado las 'curvas mecánicas' de Euler son funciones pues la correspondencia está establecida aunque no se conozca la ecuación en términos de las operaciones admitidas. A modo de ejemplo de la arbitrariedad de su definición propone la conocida 'Función de Dirichlet'. Hacia 1830 comenzó a desarrollarse la teoría de funciones de variable compleja, debida a Cauchy (1729-1857), Riemann (1826-1866) y Weierstrass (1815-1897). Con esta ampliación de miradas vienen a coincidir los conceptos de función de Lagrange y de Fourier-Dirichlet.

Finalmente la teoría de conjuntos permitió expresar la definición general de función del modo en que hoy se la conoce. Con esta última generalización todas las definiciones precedentes corresponden a casos particulares aunque, también es innegable, que la definición conjuntista de función se despojó de los atributos que tenían las definiciones precedentes y que eran característicos de los problemas que generaron la necesidad del concepto de función: idea de variabilidad, de variables, de dependencia, etc.

A MODO DE CIERRE

Finalizamos apuntando algunas consideraciones provenientes de la historia y que quizás nos permitan repensar el aprendizaje y la enseñanza de este concepto en la escuela secundaria, concepto que ha ido evolucionando a lo largo de 4000 años y cuya definición última, formal, consolidada y sin ambigüedades es relativamente reciente:

- Su elaboración **no siguió un proceso lineal.**
- El **lenguaje matemático** tuvo un rol decisivo en el avance de la configuración conceptual. Las sucesivas aproximaciones al concepto se efectuaron empleando los lenguajes coloquial, aritmético, geométrico y algebraico. La abstracción se inició con la aparición del álgebra, que posibilitó denotar con símbolos cantidades desconocidas.
- La gestación del concepto se produjo en un proceso motivado por la **observación empírica** como el modo de poder expresar relaciones entre fenómenos medibles. La audacia de extender el lenguaje matemático a las descripciones de **problemas vinculados con la física** y la confianza de que el lenguaje funcional era el adecuado para resolverlos, posibilitaron avances decisivos en la conformación del concepto.
- La **familiarización** con las funciones se lleva a cabo en el uso de las expresiones analíticas.
- El desarrollo del concepto encontró **condicionantes y limitaciones** provenientes del grado de desarrollo hasta ese momento **de la propia matemática**.
- El interés por el concepto mismo y por sus propiedades surgió en los etapas en los que el concepto estaba ya configurado. El **lenguaje conjuntista** apareció luego de finalizado el proceso de configuración del concepto.
- En el transcurso de los años el objetivo no fue tratar de hallar **definiciones** cada vez más generales sino que se buscaba que éstas fueran **operativas**, aplicables a todas las funciones conocidas el momento y que **resolvieran los problemas** cada vez más complejos que iban apareciendo.

Quizás si en nuestra formación docente inicial no hemos tenido la oportunidad de conocer la epistemología y la historia de algunos objetos de la Matemática, debamos los docentes dedicar, por voluntad propia, una parte del tiempo de nuestra formación continua para subsanar esta deficiencia.

> Si el docente sabe cómo dicho concepto se ha ido formando hasta llegar a nuestros días, podrá evaluar mejor la dificultad intelectual que ha supuesto su adquisición para la humanidad y ello le permitirá formarse una primera idea de los obstáculos que encontraran sus alumnos. Al mismo tiempo, este conocimiento le permitirá adquirir una visión mucho más amplia que la obtenida a través del estudio de las teorías modernas o de las últimas definiciones (Azcárate Giménez y Deulofeu Piquet, 1996, p.15).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Azcárate Giménez, C. y Deulofeu Piquet, J. (1996). *Funciones y Gráficas*. Madrid: Editorial Síntesis.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid. Alianza Editorial.

Bozzano, P. (2012). Poesía en la clase de Matemática. Un estudio de caso. *Revista de la Sociedad Argentina de Educación Matemática* (55), 11-19.

Cañón Loyes, C. (1993). *La matemática: creación y descubrimiento*. Publicaciones de la Universidad Pontificia Comillas. Madrid.

Courant, R. y Robbins, H. (2002). *¿Qué son las matemáticas?. Conceptos y métodos fundamentales*. México D.F.: Fondo de Educación Económica.

González Urbaneja, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. Suma. P 17-28.

Montenegro, F. y Nagel, M. (2011). *Geometría y funciones con el entorno GeoGebra en la Escuela Secundaria.* Santa Fe: Universidad Nacional del Litoral Ediciones. ISBN: 978-987-657-661-1.

Pedersen, Q. (1974). Logistics and the theory of functions. En A. d'international d' histoire de sciences 24 (94), 29-50.

Rey Pastor J. y Babini, J. (1951). *Historia de la Matemática*. Buenos Aires: Espasa-Calpe Argentina S.A.

Youschkevitch A. (1976-77). The concept of function up to the middle of the 19th century. *Archive for history of exact science* 16, 37-85.

Zapico, I., Serrano, G., Micelli, M. (2000). *Integración de áreas para el mejoramiento de la enseñanza de la matemática*. Buenos Aires: UIDI, Instituto Superior del Profesorado Dr. Joaquín V. González (publicado en CD).